El tamaño del Infinito

*Juan Carlos Hidalgo-Del Vecchio**

Introducción

El problema del infinito ha desafiado la mente y cautivado la imaginación como pocos otros problemas en la historia del pensamiento humano. Si es posible formar números hasta diez, luego hasta un millón, etc., la conclusión natural es que los números no tienen límite, que no existe el fin. La mayoría de nosotros entiende la palabra "infinito" como "sin fin" o simplemente como "no finito". Sin embargo, el entendimiento formal de este singular sustantivo abstracto constituye un gran paso en la evolución de las Matemáticas.

El infinito puede estudiarse desde dos perspectivas: el infinitamente pequeño y el infinitamente grande. Se han propuesto muchos argumentos y demostraciones (la mayoría de naturaleza mística o metafísica) para probar o negar su "existencia". El problema permaneció sin solución por casi dos mil años.

Los primeros argumentos aparecieron en la antigüedad con las paradojas de Zenón, el más importante discípulo de Parménides de Elea (450? a.C). Zenón. propuso argumentos para demostrar la inconsistencia de los conceptos de multiplicidad y división. Su naturaleza dialéctica anticipaba a Sócrates dada la forma indirecta de exponer un argumento: comenzando con las hipótesis de su oponente y vía un argumento silogístico, las premisas eran reducidas al absurdo. Los Pitagóricos creían que el espacio y el tiempo podían ser entendidos como puntos e instantes; sin embargo, como para todos es ahora natural, el tiempo y el espacio cuentan con una característica que intuitivamente se puede describir como "continuidad". Zenón el Eleático (450? a.C.) propuso cuatro paradojas importantes: (1) *La Dicotomía,* (2) *Aquiles y la Tortuga,* (3) *La Flecha,* (4) *El Estadio.* La primera argumenta que antes de que un objeto pueda viajar una distancia dada, éste debe primero atravesar la mitad de la distancia (y así sucesivamente), por lo que el desplazamiento nunca va a ocurrir; en otras palabras, la dicotomía argumenta que el todo se encuentra compuesto de una cantidad infinita de partes y éstas a su vez compuestas de infinita subpartes. Esta es una de las peculiaridades del infinito: cuando agregamos un cuarto a una mitad, luego un octavo, etc., (lo que ahora conocemos como una serie geométrica) el resultado es una cantidad finita: la unidad (o 1).

La segunda se refiere a la competencia entre Aquiles y la Tortuga; se trata de un argumento similar primero, pero en esta instancia la subdivisión infinita progresiva en vez de regresiva. Aquiles le permite a la Tortuga que empiece la carrera con cierta ventaja según Zenón, esto implicaría que Aquiles nunca alcanzará a la Tortuga independientemente de que tan rápido corra éste o que tan lenta sea su oponente. En momento en que Aquiles llegue al punto de partida de la Tortuga, ésta ya habrá avanzado cierta distancia para cuando él recorra esta segunda distancia (por más pequeña que sea) ella habrá recorrido otro pequeño tramo, etc.

Las otras paradojas se refieren al estudio del espació: la paradoja de la flecha argumenta que un objeto siempre ocupa un espacio igual a él mismo; pero aquello que siempre ocupa un espacio igual a sí mismo no puede estar en movimiento por lo que Zenón deducía que el movimiento, es una ilusión. El argumento del estadio se refiere también a la imposibilidad del movi-

* Computer Laboratory. Acer Information Services, S.A. Supervisor, Techical Support.

miento, más se trata de un discurso complicado y tedioso.

Aristóteles y otros en su tiempo trataron de desacreditar las paradojas con poco ingenio y naturalmente, sin éxito. Tres grandes matemáticos alemanes Bernhard Bolzano (1781 -1848), Greorg Cantor (1845- 1918) y Karl Weirstrass (1815-1897) finalmente tuvieron éxito a finales del siglo XIX. Weirstrass se concentró en el infinitamente pequeño; demostró que la flecha real*mente* se encuentra inmóvil y de que vivimos en el mundo de Zenón. Por otro lado, el trabajo de Cantor comprobó que si queremos aceptar el que Aquiles eventualmente alcanza a la Tortuga, entonces debemos aceptar una paradoja todavía más interesante: las partes pueden ser tan grandes como el todo!

Los conceptos del infinito fueron utilizados por los griegos al introducir el Cálculo; consideraron que el círculo difería en una magnitud infinitamente pequeña (infitesimal) de un polígono inscrito con una gran cantidad de segmentos y ángulos iguales. Leibniz utilizó ideas similares sobre infinitesimales como pilares de su Cálculo; sin embargo, nadie entendía formalmente el "infinito". El infinitesimal cuenta con propiedades muy particulares: no se les puede asignar una cantidad o dimensión, pues son más "pequeños" que cualquier dimensión o cantidad; sin embargo, con la unión de una gran cantidad de infinitesimales se pueden formar magnitudes bien definidas. Weirstrass finalmente sepultó el lado sofista y otros errores de los infinitesimales, aunque nunca describió su naturaleza y, más importante, nunca la necesitó.

La Era Heroica

Como hemos visto, las primeras discusiones sobre conceptos de lo infinitamente pequeño ocurrieron en la matemática griega antigua. Los argumentos de Zenón generaron una gran controversia dentro de la comunidad intelectual (matemática y filosófica) helénica del período Heroico [1].

Una segunda línea de discusión fue propuesta por Eudoxo de Cnidus (4087-355? a.C.) debido a sus resultados sobre secuencias convergentes, los cuales eventualmente llevaron a la definición del Método por Exhausión. Este teorema fue el primer esfuerzo para entender el significado de secuencias de números que se acercan arbitrariamente a un valor dado, lo que hoy definimos como *límites.* El concepto tuvo grandes consecuencias teóricas y computacionales; utilizando el método de doble *reductio adabsurdum* (reducción al absurdo), Eudoxo demostró varios resultados de cuadratura como, por ejemplo, que el volumen de una pirámide es igual a una tercera parte del menor cilindro la contiene.

El mismo argumento fue utilizado por Euclides y luego con todavía más éxito por Arquímedes. Arquímedes fue el primero en determinar el área y perímetro del círculo, o en otras palabras, el primero en aproximar *n* a cualquier grado de precisión; así mismo calculó el volumen y área de la esfera, cilindros y conos. Sabemos que llegó mucho más allá, pues encontró áreas bajo cónicas (curvas resultantes del corte de conos), espirales, volúmenes de sólidos de revolución, etc. En el contexto del infinito su trabajo más importante es su obra *El Método* donde describe un procedimiento para el cálculo de áreas bajo curvas; aunque no lo consideraba un procedimiento riguroso para demostrar resultados *formalmente,* lo creía apropiado para la definición de teoremas que luego debían ser demostrados rigurosamente. El método de Arquímedes se puede describir como un procedimiento de mecánica infinitesimal; se trata de ver a un segmento de área como una unión infinita de líneas, cada una infinitamente delgada. Con este modelo en mente es posible desplazar áreas en el espacio sencillamente moviendo una cantidad infinita de líneas; luego se puede aplicar el principio de la palanca a las partes elementales de la figura y compararlas con áreas conocidas. En [3] se puede encontrar una bonita discusión de la aplicación del método de Arquímedes para encontrar el área bajo un segmento de parábola.

El Renacimiento

La Edad Media fue un período relativamente seco en el desarrollo de las matemáticas; no fue sino hasta los principios del Renacimiento que se lograron progresos sustanciales en el estudio del infinito.

Al comienzo del siglo XVII se retomaron las ideas de Arquímedes para obtener nuevos resultados. En 1586 el ingeniero flamenco Simón Stevin (1548-1620) y el matemático italiano Luca Valerio (en 1604) fueron los primeros en tratar de evadir el sistema de doble reducción al absurdo del Método de Exhausión de Arquímedes, intentando pasar directamente a los valores límite. En 1615 Johannes Kepler (1571-1630) publicó un texto donde explicaba cómo determinar el volumen de barriles de vino. Utilizando métodos informales Kepler dividía un sólido en una cantidad infinita de piezas y así logró calcular con exactitud volúmenes de esferas y toroides. Discutió un método popular (mecánico e informal) para calcular los volúmenes de varios tipos de barriles de vino y, en particular, cómo determinar el más económico. Dadas sus intenciones populares, reemplazó los métodos rigurosos de Arquímedes por un sistema infinitesimal intuitivo y así poder concentrarse en los puntos esenciales del cálculo. Por este mismo tiempo ocurrió otro gran evento en la historia de la matemática, la invención (en 1637) de la Geometría

Analítica por Rene Descartes (1596-1650) y simultánea e independientemente por Pierre de Fermat (1601 -1665); estos resultados tuvieron gran influencia en el desarrollo del Cálculo Infinitesimal.

Descartes propuso un método para calcular tangentes (líneas también conocidas como *normales)* de curvas algebraicas, encontrando los círculos tangentes a la curva. El método de Fermat para el cálculo de normales corresponde al sistema actual para cómputo de derivadas de una función en un punto. Este resultado se encontraba implícito en su método para computar subtangentes; aunque se trataba de un sistema muy elegante, contaba con una peculiaridad poco rigurosa que pronto se convirtió en un tema de controversia. La fórmula de la subtangente correspondía a la siguiente ecuación: A = F(x) / ((F(x+E)-F(x))/E) y asignar a E = 0. Asignar el valor de 0 a E fue el causante de la polémica; según Fermat era de esperar que durante la evaluación algebraica de la expresión, el término E eventualmente desaparecería vía cancelación y por lo tanto la división estaría bien definida. Por supuesto que la razón para sugerir un procedimiento tan poco formal era que el concepto de límite no había sido descubierto todavía. Aunque la teoría era poco formal, Fermat tuvo gran éxito en sus investigaciones sobre integración. La noción de límite fue considerada por el italiano Pietro Mengoli en su libro *Geométrica Speciosa* (1659). En particular, al modificar el procedimiento de Luca Valerio, dio una representación precisa para el área bajo ciertas curvas como límites de sumas de rectángulos.

Newton y Leibniz

Antes del año de oro de Newton (1665-66, año en que descubrió el Teorema del Binomio), ya existía un gran desarrollo de la teoría de integración, pero se trataba de resultados aislados sin una teoría unificadora. El primer gran resultado de Newton fue el hecho general que la diferenciación y la integración son procesos inversos, proposición mejor conocida como el Teorema Fundamental del Cálculo. Como parte de sus estudios de mecánica, Newton utilizó el tiempo *t* como una variable independiente, al *flujo* como variable dependiente (representado por *x)* y a su velocidad o *fluxión* como la primera derivada respecto al tiempo. Además, era necesario definir un método simbólico y sistemático de operaciones analíticas para ser aplicado bajo reglas estrictas sin ninguna interpretación geométrica. Estos fueron los grandes pasos iniciales ideados por Newton, los cuales fueron propuestos de nuevo por Leibniz diez años después bajo un esquema distinto.

Sin embargo, fue Leibniz quien nos dio la notación que utilizamos actualmente para diferenciación e integración. Los símbolos que utilizamos en el cálculo moderno fueron introducidos el 29 de octubre de 1625.
En este día el respetado matemático discutía integraciones utilizando la metodología de Cavalieri conocida como "omnes lineae". Abrevió la palabra "omnes” a "omn" y luego aplicó el símbolo en algunas operaciones formales. Un tiempo después remplazó el término "omn" por el símbolo $\int$ por ser la primera letra d palabra *summa.* En 1684 Leibniz publicó su cálculo diferencial; introduce a dx como un intervalo finito arbitrario y luego define a dy como la proporción *dy:dx*= ordenada: subtangente. Luego en 1686 publicó un artículo utilizando el símbolo de integral $\int$ (la palabra "integral" fue introducida por Jakob Bernoulli en 1690).

El debate sobre Infinitesimales y los fundamentos del Cálculo

En 1689 los hermanos Bernoulli comandaban totalmente el cálculo diferencial y las partes cruciales cálculo integral. Para 1690, vía las enseñanzas Johann Bernoulli, un grupo de matemáticos franceses que incluía a l'Hópital, Varignon, Montmort, Carre y otros, habían entrado en contacto con el nuevo cálculo. En 1696 el marqués de l'Hópital, basado en las ideas de Leibniz, publicó el primer texto de cálculo diferencial: *Análisis del infinitamente pequeño.* El texto tuvo gran éxito y por mucho tiempo representó la única forma de tener acceso al cálculo diferencial.

En 1699 la Academia de Ciencias de París abrió varias plazas y Melebranche, un matemático estudiado en cálculo y conocido como el patrón de la "revolución infinitesimalista", fue electo como miembro honorario. La presencia dentro de la Academia de un grupo de matemáticos que incluía a Rolle, Ph. De la Hire y Galloys, personas claramente adversas al nuevo cálculo, creó una situación explosiva. Desde 1700 a 1706 la Academia estuvo dividida sobre la admisibilidad de las nuevas técnicas: por un lado, estaban los infinitesimalistas caracterizados por su total adherencia al cálculo de Leibniz codificado por I 'Hópital y en general con su total convicción a la existencia de cantidades infinitesimales; por otro lado, estaba la fracción finitalista caracterizada por su rechazo a dar estatus de procedimiento formal a las consideraciones infinitesimal y con con total convicción en técnicas clásicas.

La causa de la confrontación se centraba en el fundamento de la teoría: la caracterización formal de los infinitesimales. Los postulados principales presentados por l'Hópital son los siguientes:

Definición I: Cantidades variables son aquellas que se incrementan o decrementan constantemente; cantidades constantes son aquellas que continúan siendo las mismas mientras que otras cambian.

Definición II: La parte infinitamente pequeña por la que una cantidad variable se incrementa o decrementa es conocido como el *diferencial* de esa variable.

Postulado I: Concédase que dos cantidades cuya diferencia es infinitamente pequeña pueden ser consideradas las mismas y utilizadas indiferentemente; dicho de otra manera, una cantidad que se incrementa o decrementa en una cantidad infinitamente pequeña puede considerarse como que se mantiene con el mismo valor.

Postulado II: Concédase que una curva (o línea) puede considerarse como el ensamblaje de una cantidad infinita de líneas rectas de tamaño infinitamente pequeño; dicho de otra manera, una curva es un polígono de una cantidad infinita de lados cada uno de un tamaño infinitamente pequeño cuyos ángulos entre ellos determinan la curvatura de la línea.

Nótese que el diferencial de una variable dx es definido como una cantidad muy pequeña (infinitamente pequeña) y que los siguientes postulados caracterizan propiedades de estas pequeñas cantidades. El primero dice que $x+dx=x$ y el segundo que toda curva es la composición de una colección de líneas rectas. Aunque estos conceptos pueden aceptarse intuitivamente como correctos, es entendible porqué era necesario preguntarse si los "infinitesimales" existen como cantidades o, más importante, si su definición y propiedades son consistentes con conceptos y métodos clásicos.

Estos fueron los conceptos básicos que l'Hópital utilizó para definir el cómputo de diferenciales y más adelante definió cómo utilizar diferenciales para el cómputo de tangentes y otros problemas. Su definición de tangente correspondía a la definición de Leibniz: como proporción entre los lados del triángulo característico de una curva en un punto arbitrario más fijo (la misma definición que utilizamos en cursos básicos de lo moderno).

L'Hópital pensaba que sus definiciones y postulados eran autoevidentes y que eran fáciles de demostrar utilizando métodos clásicos (en particular exhausión). Leibniz y Newton fueron mucho más reservados en sus consideraciones infinitesimales. Además, por es estratégicas, siempre buscaron evadir referencias a infinitesimales en sus primeras exposiciones públicas del tema. La publicación de Leibniz en 1684 no tenía ninguna referencia a infinitesimales y la existencia de un borrador (nunca publicado por Leibniz) donde el autor justifica el cálculo por medio de consideraciones infinitesimales, evidencia las dudas que éste tenía sobre el rigor de los argumentos. De la misma forma Newton fue muy cuidadoso y en su *Principia* utilizó los sin referencias explícitas a infinitesimales.

Sin lugar a dudas las consideraciones infinitesimales eran heurísticamente la vanguardia del nuevo método; l'Hópital trató de estirar la admisibilidad de sus métodos al borrar todo tipo de heurísticas de su cálculo, elevando el paradigma a un sistema riguroso basado en infinitesimales. Su libro fue el primer intento de formalizar el concepto intuitivo de cantidades infinitesimales (y las reglas que los gobiernan) bajo un sistema axiomático. Esto no era fácil de digerir por aquellos que consideraban todo tipo de consideraciones infinitesimales como poco rigurosas. El adversario más abierto del cálculo infinitesimal como método riguroso fue el algebrista Michel Rolle, quién formuló tres diferentes ataques: el cálculo no es riguroso, se infieren conclusiones erróneas (lo que ahora llamamos *inconsistente)* y no ha producido ninguna proposición verdadera novedosa. Aunque tomó bastante tiempo rechazar las dos primeras objeciones con argumentos formales, la tercera posición fue desechada muy rápidamente gracias a los grandiosos resultados provenientes de la aplicación del nuevo método. Al final fueron los resultados del cálculo los que llevaron el debate a su término: tal vez el paradigma no contaba con fundamentos formales, pero el volumen de descubrimientos provenientes de su utilización hacía imposible ignorarlo. La primera parte del debate (1700-01) se concentró entre las dos primeras aseveraciones de Rolle y los argumentos Pierre Varignon, quien se tomó como tarea personal defender el cálculo infinitesimal. Para responder a la primera objeción Varignon aportó "pruebas" de existencia para las cantidades infinitamente pequeñas. El problema fue que las "pruebas" eran más argumentos sugestivos que demostraciones formales. La segunda proposición de Rolle expresaba su objeción a identificar "las partes" con "el todo" como en la ecuación $x+dx=x$ y por lo tanto que el método era intrínsecamente inconsistente. De nuevo la posición de Varignon fue tratar de clarificar la naturaleza de los infinitesimales y demostró convincentemente que Rolle no había utilizado apropiadamente los conceptos del cálculo en sus argumentos. Varignon pensaba que una cantidad infinitesimal no debía considerarse significativa con respecto a su integral y ofreció una prueba de sus proposiciones utilizando el método de exhaustión. Aun así, los argumentos de Varignon eran insatisfactorios.

A través del debate, Varignon se mantuvo mencionando a Newton como la fuente de una presentación rigurosa del cálculo suponiendo que los modelos de Newton y Leibniz eran equivalentes (y que el de Newton era el más riguroso). Por otro lado, Rolle se mantuvo defendiendo una metodología en la que no había que utilizar infinitesimales y sugirió los métodos de Fermat y Hudde como todo lo necesario para resolver problemas de tangentes, máximos y mínimos. Después de mucha confrontación y sin poder encontrar consenso, el paso natural fue consultar al maestro mismo y Varignon solicitó a Leibniz que definiera claramente lo que él entendía como "cantidad infinitesimal". Leibniz respondió con tres puntos principales:

1. No hay necesidad de basar el análisis matemático en suposiciones metafísicas.
2. Aun así, podemos admitir las cantidades infinitesimales, si no como objetos reales por lo menos como objetos ficticios bien fundamentados (como se entienden en álgebra las raíces cuadradas de números negativos, por ejemplo). Los argumentos para sostener esta posición dependen solamente de una forma encubierta del principio metafísico de continuidad.
3. Las pruebas se pueden organizar para que el error siempre sea menor que cualquier error asignado.

Al mismo tiempo Leibniz afirmaba que era posible transformar cualquier argumento infinitesimal en una prueba con estilo Arquimediano, o sea, utilizando el método de exhaustión. Aunque bastante sugestiva, la idea nunca fue desarrollada en forma convincente. Es importante notar que los comentarios de Leibniz proponen que los problemas con los fundamentos del cálculo no deberían ser si los infinitesimales existen o no, sino más bien si los métodos son consistentes. Las opiniones de Leibniz no ayudaron a resolver las diferencias y el debate continuó por tres años más. Entre 1702-03 los argumentos se concentraban en los artículos de Rolle en los que describía métodos nuevos para resolver problemas de tangentes (además de sus críticas al cálculo infinitesimal y los infinitesimalistas). El otro bando se encontró esta vez representado por Joseph Saurín quien demostró que en varias situaciones particulares los métodos de l'Hópital eran consistentes. A partir de este punto el debate se tornó cada vez más personal y político; sin embargo, las exitosas aplicaciones del modelo generaban cada vez más una aceptación general del cálculo como método riguroso.

Rolle atacó de nuevo en 1703 y en 1704 se concentró en problemas con las inversas de tangentes (el cálculo integral). Saurín no respondió inmediatamente a los ataques, pero ahora otro infinitesimalista decidió integrarse al debate: Fontenelle, el perpetuo secretario de la Academia. En 1705 Saurín atacó a Rolle y en ese momento el debate degeneró en insultos. La situación se resolvió vía una comisión asignada por la Academia y los ataques fueron detenidos inmediatamente. Aun así, era claro que la contienda estaba lejos de ser decidida.

Con la salida de Rolle, que nunca estuvo convencido de la consistencia del cálculo infinitesimal, el cálculo integral logró ser reconocido. Aunque los fundamentos del modelo aún quedaban oscuros el análisis siguió su curso. El argumento continuó vigente en Inglaterra vía la publicación del libro *The Analyst* por Berkeley, donde se refería a los infinitesimales como “los fantasmas de cantidades que pasaron al más allá”. Resentía el apoyo que la ciencia Newtoniana daba al materialismo y objetaba la teoría de fluxiones. Curiosamente las tres principales objeciones de Rolle fueron presentadas en el libro de Berkeley; aunque existían grandes diferencias entre los ataques de Rolle y las críticas de Berkeley, los dos estaban de acuerdo una gran cantidad de puntos y especialmente en el finitismo explícito. Para Rolle el finitismo estaba encapsulado en la objeción Cartesiana a la admisión de la matemática infinitalista como disciplina rigurosa; Berkeley fundamentaba su posición en consideraciones epistemológicas. También diferían en la lógica de sus críticas. Rolle pensaba que los principios errados del cálculo llevarían inevitablemente a conclusiones falsas; Berkeley nunca cuestionó los resultados del método y propuso un sistema de doble error como explicación a las conclusiones del paradigma, o en palabras "a la verdad, mas fuera de la ciencia".

Conclusiones

Como hemos visto, el cálculo diferencial y el integral fueron descritos originalmente en el siglo XVII Leibniz y Newton. Newton utilizaba en sus cálculos el número o que tenía la característica de ser infinitamente pequeño (o sea, más pequeño que cualquier cantidad) por lo que al ser multiplicado por cualquier número finito el resultado es una cantidad despreciable. Sin embargo, era necesario dividir por o, lo que implicaba que debía ser distinto de cero. Los *dx de* Leibniz eran menores que cualquier cantidad asignable, pero también distintos de cero.

Estas ideas no eran fáciles de comprender o aceptar. Durante el siglo dieciocho el uso de infinitesimales fue duramente atacado por Berkeley, puesto en duda por D'Alambert y utilizado con gran éxito por Euler. Euler utilizó los infinitesimales libremente (y en formas que ahora no les permitimos a estudiantes universitarios) mientras creaba las matemáticas que ahora aprendemos en cursos de cálculo superior. No fue sino hasta el siglo diecinueve que se presentaron los fundamentos formales del cálculo que ahora se exponen en libros de texto. El tratamiento de límites se formuló rigurosamente y el debate llegó a su fin.

En 1961 el logista Abraham Robinson introdujo un nuevo método para el tratamiento de límites basado en teoría de modelos, rescatando finalmente a los infinitesimales de toda disputa intelectual. Su método se basa en modelos no estándar (o *interpretaciones no estándar)* de conjuntos de fórmulas en Lógica de Predicados de Primer Orden. El método combina las ventajas de la intuición infinitesimal con los estándares modernos de rigor.

Referencias

[1] Boyer, Cari B. *A History of Mathematics.* Princeton University Press. New Jersey (1985).

[2] Mancosu, Paolo. "The Metaphysics of the Calculus: A Fundational Debate in the París Academy of Sciences, 1700-6". *Historia Mathematica,* 16 (1989) 224-248.

[3] Rosenthal, A. "The History of Calculus", *American Mathematical Monthly,* **58** (1951) 75-86.

[4] Struik, Dirk *A Concise History of Mathematics* Dover, New York (1967).